Chapitre 34

Probabilités 1 – Variable aléatoire

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur Ω (cf définitions ci-dessous).
E, F sont des ensembles quelconques. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Univers et probabilités

En probabilités, on travaille fondamentalement sur les mêmes objets que ceux qu'on a déjà vus, mais on utilise un vocabulaire différent, que l'on va introduire ici.

1.1 Univers

Définition 34.1

On appelle univers un ensemble non vide (généralement noté Ω). Dans ce chapitre, on se restreint aux univers finis, càd aux univers Ω qui ont un nombre fini d'éléments.

L'univers est choisi de telle sorte que, pour une expérience aléatoire donnée, chaque résultat possible correspond à un élément de Ω.

Exemple 1. Si on lance une pièce, les deux résultats possibles sont Pile (P) et Face (F). On peut donc prendre $\Omega = \{P, F\}$, ou de manière équivalente $\Omega = \{0, 1\}$ si on associe 0 à Pile et 1 à Face.

Exemple 2. Si on lance un dé à six faces, on prendra l'univers

$$\Omega = [\![1,6]\!] = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Exemple 3. Si on lance deux dés à six faces, on prendra l'univers

$$\Omega = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Définition 34.2

Une partie $A \subset \Omega$ est appelée un <u>événement</u>.
Un singleton $\{\omega\} \subset \Omega$ est appelé un <u>événement élémentaire</u>.
Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé un <u>résultat</u> ou encore une <u>issue</u>.

Un événement n'est donc rien d'autre qu'un sous-ensemble d'un univers. L'ensemble de tous les événements correspond donc à $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 4. Si on lance un dé à six faces, l'événement "le résultat du dé est pair" correspond à

$$A = \{2,4,6\} \subset \Omega$$

L'événement "le résultat du dé est un nombre premier impair" correspond à

$$B = \{3,5\} \subset \Omega$$

Définition 34.3

Deux événements A et B sont dits <u>disjoints</u> (ou <u>incompatibles</u>) si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 5. Les deux événements A et B de l'exemple précédent sont incompatibles.
Si A est un événement, alors A est incompatible avec son complémentaire $\overline{A}$.

Définition 34.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille d'événements $(A_1, \cdots, A_n)$ de Ω est appelé un <u>système complet d'événements</u> (S.C.E.) de Ω si :

- Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Cela revient presque à dire que les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une partition de Ω : il faudrait pour cela rajouter la condition que chaque ensemble A_i soit non vide. En pratique, on permet aux ensembles A_i d'être vides pour écrire plus facilement certaines propositions.

Exemple 6. Pour tout événement A de Ω, la famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements de Ω.

Exemple 7. La famille des événements élémentaires $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ forme un système complet d'événements de Ω.
Dans l'exemple du dé à six faces, ce système complet d'événements correspond à

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{4\}, \quad \{5\}, \quad \{6\}$$

1.2 Espaces probabilisés

Définition 34.5

On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Additivité : Pour tous événements $A, B \subset \Omega$ disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé (fini car Ω est fini).

Propriété 34.6

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A, B deux événements de Ω. Alors

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
4. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Démonstration. On montre les assertions dans l'ordre 3–4–2–1–5.

Montrons 2. À partir de l'assertion 3 avec $B = \Omega$, on a

$$\underbrace{\mathbb{P}(\Omega \setminus A)}_{=\mathbb{P}(\overline{A})} = \underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{=1} - \mathbb{P}(A)$$

d'où l'assertion 2. Maintenant, en prenant $A = \Omega$ dans l'assertion 2, on obtient l'assertion 1 :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

Enfin, montrons l'assertion 5. On écrit $A \cup B$ comme une union disjointe d'ensembles :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus (A \cap B))$$

Par la définition et par 3, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \qquad \text{car } A \cap B \subset B \end{aligned}$$

□

Exemple 8. Pour tout événement $A \subset \Omega$, on peut définir

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

Il s'agit d'une probabilité sur Ω appelée probabilité uniforme.

Propriété 34.7

Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

et plus généralement, pour tout événement $B \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Démonstration. Comme $A_1, \cdots, A_n$ sont disjoints deux à deux, on peut utiliser la propriété d'additivité (généralisée à n ensembles) :

$$\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

De même, les ensembles $(B \cap A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont disjoints deux à deux et leur réunion est B, ce qui donne la deuxième formule. $\square$

1.3 Construction de probabilités

Définition 34.8

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle distribution de probabilités sur E, toute famille $(p_\omega)_{\omega \in E}$ telle que

- Pour tout $\omega \in E$, on a $0 \leq p_\omega \leq 1$.
- $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

On notera que comme Ω est fini, la somme ci-dessus ne contient qu'un nombre fini de termes.

Exemple 9. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors en posant

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_5 = \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad p_6 = \frac{1}{2}$$

la famille $(p_k)_{1 \leq k \leq 6}$ est une distribution de probabilités sur Ω.

Propriété 34.9

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Alors en notant pour tout $\omega \in \Omega$

$$p_\omega := \mathbb{P}(\{\omega\})$$

La famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités sur Ω.

Démonstration. Par définition, une probabilité $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc il est clair que $0 \leq p_\omega \leq 1$. Ensuite, par additivité,

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

□

Propriété 34.10 (Construction de probabilités)

Réciproquement, si $(q_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := q_\omega$$

et dans ce cas, pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} q_\omega$$

La Proposition ci-dessus montre qu'il suffit de connaitre $\mathbb{P}$ sur les événements élémentaires $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ pour déterminer totalement $\mathbb{P}$ (càd les valeurs prises par $\mathbb{P}(A)$ pour $A \subset \Omega$).

Exemple 10. La probabilité uniforme (cf exemple 8) peut être construite (et est entièrement déterminée) en posant

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

1.4 Exemples d'expériences aléatoires

Pour une expérience aléatoire donnée, on peut construire une probabilité $\mathbb{P}$ qui reflète justement la probabilité qu'un résultat $\omega \in \Omega$ se produise.

Exemple 11. On lance un dé équilibré à six faces. L'univers correspondant est

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Si le dé est équilibré, alors la probabilité $\mathbb{P}$ correspondante est la probabilité uniforme :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(\{\omega\})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Par exemple, la probabilité d'obtenir un résultat pair est donc :

$$A = \{2,4,6\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple 12. On suppose maintenant que le dé est pipé. Il y a une chance sur deux que le résultat soit 6, les autres résultats étant équiprobables. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}$ correspondante ? Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat pair ?

Le formalisme ci-dessus, à savoir un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$, ne permet pas toujours de traiter efficacement un problème en probabilité. Il est fréquent qu'on s'intéresse non pas à la valeur du résultat $\omega \in \Omega$, mais à la valeur d'une fonction qui dépend de ω. Par exemple, on lance trois dés à six faces et on souhaite évaluer la probabilité que la somme des valeurs des deux premiers dés est égale à la valeur du troisième. Dans ce cas, l'univers est $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$ que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Un résultat ω est de la forme $(i,j,k) \in \Omega$, avec i,j,k les valeurs respectives du premier, deuxième et troisième dés. On cherche alors la probabilité que $i+j=k$, donc :

$$\mathbb{P}\left(\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (2,1,3),\cdots,(3,3,6),\ (4,2,6),\ (5,1,6)\}\right)$$

Mais si on définit $f(\omega) = f(i,j,k) = i+j-k$, alors cette probabilité s'écrit plus succintement

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = 0\})$$

L'introduction de cette fonction f permet donc de reformuler et d'exprimer plus clairement les événements dont on veut calculer la probabilité. On appelle cette fonction f une *variable aléatoire* et on la note en général X.

2 Variable aléatoire

2.1 Variable aléatoire

Définition 34.11

On appelle variable aléatoire (abrégé v.a.) sur (un univers fini) Ω toute application de Ω dans un ensemble E.

On dit qu'une variable aléatoire est réelle (abrégé v.a.r.) si $E \subset \mathbb{R}$, et complexe si $E \subset \mathbb{C}$.

On note généralement X ou Y une variable aléatoire. Une variable aléatoire X est donc une fonction dont la valeur dépend du résultat de l'expérience aléatoire : à chaque résultat $\omega \in \Omega$, on associe une valeur $X(\omega) \in E$.

Exemple 13. On lance un dé à six faces, de sorte qu'on prend l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$. La variable aléatoire

$$X(\omega) = \omega^2$$

correspond à la fonction qui au résultat du dé associe son carré. On peut prendre alors $E = \{1,4,\cdots,36\}$ mais on peut tout aussi bien prendre $E = \mathbb{R}$. C'est donc une v.a.r.

Malgré ce nom, une variable aléatoire X n'est ni une variable, ni aléatoire. Ce n'est pas une variable, mais une application. Elle n'est pas non plus aléatoire en soi : l'aléatoire se situe au niveau de l'expérience, qui va déterminer le résultat ω obtenu en fonction d'une certaine probabilité $\mathbb{P}$.

Définition 34.12

Soit A **un événement de Ω**. Alors on note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire réelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : \Omega &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Cette v.a.r. est appelée indicatrice de A.

2.2 Notations incontournables

- Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. et A une **partie de E**. Alors on note, de deux façons possibles :

$$\left.\begin{array}{l} \{X \in A\} \\ (X \in A) \end{array}\right\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \qquad \subset \Omega$$

  Comme $A \subset E$, l'ensemble A n'est pas un événement. Par contre, $\{X \in A\}$ est un événement car il est inclus dans Ω ; c'est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \in A$.

- Comme $\{X \in A\}$ est un événement, on peut en particulier évaluer sa valeur avec une probabilité $\mathbb{P}$. Pour alléger les notations, on écrit généralement

$$\mathbb{P}(X \in A) := \mathbb{P}(\{X \in A\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

  La valeur de $\mathbb{P}(X \in A)$ équivaut à la "probabilité" que $X(\omega)$ soit dans la partie A (où ω est un résultat d'une expérience aléatoire).

- On peut définir d'autres événements à partir de X : pour tout $x \in E$

$$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

  Et si $E = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \{X \le x\} &:= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \\ \{X \ge x\} &:= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ge x\} \\ \{X < x\} &:= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \\ \{X > x\} &:= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} \end{aligned}$$

- On peut, là encore, évaluer la probabilité de ces événements :

$$\mathbb{P}(X = x) \qquad \mathbb{P}(X \le x) \qquad \mathbb{P}(X > x) \qquad \text{etc.}$$

- Plus généralement si $\mathfrak{P}$ est une propriété qui est vérifiée ou non par un élément de E, l'événement $\{X \text{ vérifie } \mathfrak{P}\}$ est défini comme l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ vérifie $\mathfrak{P}$. On peut donc écrire les événements

$$\{X \in 2\mathbb{N}\} \qquad \{X \text{ est premier}\} \qquad \{X^2 - X \ge 0\}$$

  et évaluer leur probabilité.

Exemple 14. Soit A **un événement** (donc $A \subset \Omega$). On considère la v.a.r. $X = \mathbf{1}_A$. Alors

$$\{\mathbf{1}_A = 1\} = \dots \qquad\qquad \{\mathbf{1}_A = 0\} = \dots$$

et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\{\mathbf{1}_A = x\} = \dots$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \dots$$

Exemple 15. On lance une pièce (équilibrée) 3 fois et on note X la v.a. qui correspond au nombre de "pile" obtenus. Alors (on justifiera proprement ces calculs ultérieurement) :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X > 3) = \dots$$

Propriété 34.13

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. et A, B deux **parties de E**. Alors

$$\{X \in A \cup B\} = \{X \in A\} \cup \{X \in B\}$$

$$\{X \in A \cap B\} = \{X \in A\} \cap \{X \in B\}$$

$$\{X \in E \setminus A\} = \overline{\{X \in A\}}$$

Démonstration. On a vu au chapitre 4 que pour une application f, on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, d'où, pour $f = X$:

$$\{X \in A \cup B\} = X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) = \{X \in A\} \cup \{X \in B\}$$

De même pour $\{X \in A \cap B\}$. Enfin,

$$\{X \in E \setminus A\} = X^{-1}(E \setminus A) = \Omega \setminus X^{-1}(A) = \overline{X^{-1}(A)} = \overline{\{X \in A\}}$$

□

Propriété 34.14

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si A, B sont disjoints, alors $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ aussi, donc :

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}\left((X \in A) \cup (X \in B)\right) \underset{\text{si } A, B \text{ sont disjoints}}{=} \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B)$$

2.3 Opérations sur les v.a.

Si X, Y sont des v.a. réelles ou complexes définies sur Ω, alors ce sont des applications de Ω dans $\mathbb{K}$, donc des éléments de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\Omega}$. On a vu en particulier que $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ possède une structure d'e.v. et d'anneau, ce qui, pour tous $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$, donne un sens aux applications $f+g$, λf et fg. De même, on peut définir d'autres v.a.r. à partir de X, Y :

$$X+Y : \omega \mapsto X(\omega)+Y(\omega)$$

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda X : \omega \mapsto \lambda X(\omega)$$

$$XY : \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega)$$

Attention ! Ces opérations ne sont a priori pas définies si X, Y sont à valeurs dans un ensemble E quelconque.

Exemple 16. Si X est une v.a.r. définie sur Ω

$$\left\{X^2 \geq 0\right\} = ... \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}(X^2 \geq 0) = \ldots$$

Définition 34.15 (Composition)

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. et $f : E \to F$ une application. Alors on note $f(X) := f \circ X$. Il s'agit d'une v.a. définie sur Ω à valeurs dans F :

$$\begin{aligned} f(X) : \Omega &\to F \\ \omega &\mapsto f(X(\omega)) \end{aligned}$$

On peut donc, sous réserve que cela ait un sens, considérer les v.a.

$$\sqrt{X}, \qquad \ln X, \qquad e^X, \qquad \text{etc.}$$

3 Loi d'une variable aléatoire

3.1 Définition et propriétés "héritées"

Propriété 34.16

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. (et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω). On pose l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité **sur** E (et non Ω) appelée loi de X.

Démonstration. On vérifie facilement que $\{X \in E\} = \Omega$ donc $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = 1$.

Ensuite, par la Proposition 34.14, on vérifie l'additivité de $\mathbb{P}_X$. □

$\mathbb{P}_X$ hérite ainsi des propriétés vérifiées par toute probabilité :

Propriété 34.17

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. (et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω). Soit A, B deux **parties de $\boldsymbol{E}$.** Alors :

1. $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = 1$
2. $\mathbb{P}_X(\varnothing) = \mathbb{P}(X \in \varnothing) = 0$
3. $\mathbb{P}(X \in \overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(X \in A)$
4. Si A, B sont disjointes, on a
$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B)$$
5. Si $A \subset B$, alors
$$\mathbb{P}(X \in A) \leq \mathbb{P}(X \in B)$$
6. $$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A \cap B)$$
7. Pour tout $x \in E$, on note
$$\mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X \in \{x\})$$
La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ est une distribution de probabilités, qui de plus détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$: pour tout $A \subset E$, on a
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$
8. Réciproquement, si $(p_x)_{x \in E}$ est une distribution de probabilités, il existe une unique loi $\mathbb{P}_X$ telle que
$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = p_x$$

La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ détermine entièrement $\mathbb{P}_X$, mais pas X : on peut en effet trouver des v.a. différentes X_1, X_2 telles que $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$, cf exemple 23.

Remarque. E peut tout à fait être infini, donc une partie $A \subset E$ également. Pourtant, la somme $\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$ a bien un sens : en effet, l'ensemble des valeurs prises par X, à savoir

$$X(\Omega) := \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

est fini avec $\mathrm{card}(X(\Omega)) \leq \mathrm{card}(\Omega)$. Ainsi, si $x \notin X(\Omega)$, on a

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \varnothing \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}(X = x) = 0$$

Au final, on peut donc réécrire

$$\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$$

et cette dernière somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes, donc a toujours un sens.

3.2 Lois usuelles

La loi $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathcal{P}(E)$, ainsi $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ n'a de sens que si $A \subset E$. Dans la pratique, connaitre la loi $\mathbb{P}_X$ nous suffit pour calculer des probabilités. Ainsi :

- plutôt que de donner explicitement l'application X, i.e. la valeur de $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$...
- ... on s'intéresse en fait aux valeurs de $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ lorsque A parcourt $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, pour peu qu'on connaisse la loi de X (i.e. $\mathbb{P}_X$), on peut se passer de Ω. Dans les définitions de cette section, on verra qu'il n'est pas utile de préciser l'ensemble Ω.

On va définir un certain nombre de lois. Par le dernier point de la Proposition 34.17, il suffit pour cela de se donner un ensemble E et une distribution de probabilités $(p_x)_{x\in E}$ avec $p_x := \mathbb{P}_X(X = x)$. Cela déterminera entièrement la loi $\mathbb{P}_X$.

Définition 34.18 (Loi uniforme)

On suppose E fini non vide. On dit qu'un v.a. $X : \Omega \to E$ suit une loi uniforme sur E, ce qu'on notera $\boxed{X \sim \mathcal{U}(E)}$, si

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}$$

Dans ce cas,

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$$

On peut vérifier que $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in E}$ est bien une densité de probabilités : $\sum_{x\in E} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in E} \frac{1}{\text{card}(E)} = 1$.

Exemple 17. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prend une boule au hasard et on note X le numéro de la boule tirée. Alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, i.e.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \qquad \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$$

En particulier, la probabilité qu'on tire un numéro pair est, en posant $A = 2\mathbb{N} \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, donnée par :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)} = \frac{1}{n} \times \begin{cases} n/2 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

Exemple 18. Un jeu de cartes contient 4 couleurs (♥,♦,♣,♠) et 13 valeurs $(1, 2, 3, \ldots, 10, V, D, R)$. On tire une carte au hasard et on note X la valeur de la carte tirée (avec $V = 11$, $D = 12$, $R = 13$). Alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 13 \rrbracket)$, i.e.

$$\forall i \in \llbracket 1, 13 \rrbracket \qquad \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{13}$$

Si on note Y la couleur de la carte tirée, alors ...

Comme on peut le voir, dans les deux exemples ci-dessus, il n'est pas nécessaire d'expliciter l'univers Ω.

Définition 34.19 (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, si X est à valeurs dans $\{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

On notera $\boxed{X \sim \mathcal{B}(p)}$.

La loi de Bernoulli représente une expérience simple avec seulement deux résultats possibles :

- Le cas $X=1$ représente un "succès", ce qui arrive avec probabilité p.
- Le cas $X=0$ représente un "échec", ce qui arrive avec probabilité $1-p$.

Exemple 19. Si on lance une pièce et qu'on note X la v.a.r. qui vaut 1 si le résultat est face, 0 si c'est pile, alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$ (si la pièce est équilibrée)

Exemple 20. Si A est un évènement (de Ω), alors la v.a.r. $\mathbf{1}_A$ vérifie

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \ldots \qquad\qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 0) = \ldots$$

donc $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre ...

Définition 34.20 (Loi binomiale)

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une v.a. X suit une loi binomiale de paramètre (n,p), si X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On notera $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p)}$.

Démonstration. Il faut vérifier que ceci définit bien une loi. Il faut donc s'assurer que la famille $(\mathbb{P}(X=k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est bien une distribution de probabilités. Il est clair que $\mathbb{P}(X=k) \geq 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$, ce qui entrainera en particulier que $\mathbb{P}(X=k) \leq 1$ et concluera. Par la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1^n = 1$$

d'où le résultat. □

Remarque. On verra ultérieurement que, si on répète n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p, alors le nombre total de succès obtenu correspond à la loi biômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Autrement dit, si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{P}(X=k)$ correspond à la probabilité d'avoir k succès après n tentatives *indépendantes*[1], où chaque tentative a la probabilité p d'être un succès.

1. Ce terme sera défini ultérieurement

Exemple 21. On lance n fois une pièce équilibrée. Si X compte le nombre total de piles obtenu, alors X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

Exemple 22. On dispose d'une urne avec un nombre indéfini de boules mais une proportion $p \in [0,1]$ d'entre elles sont blanches. On tire n boules *avec remise*. Si X compte le nombre total de boules blanches tirées, alors X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

3.3 Propriétés sur les lois

Définition 34.21

Soit X, Y deux v.a. à valeurs dans le même ensemble E. On dit que X et Y ont (ou suivent la) <u>même loi</u> si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, càd

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$$

ou encore

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$$

On notera $X \sim Y$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Attention, $X \sim Y$ ne signifie pas $X = Y$!

Exemple 23. Soit X, Y deux v.a. telles que $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y = 1 - X$. Montrer que X et Y ont même loi.

Propriété 34.22 (Loi de $f(X)$)

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. et $f : E \to F$. La loi de la v.a. $f(X) : \Omega \to F$ est donnée par

$$\forall y \in F \qquad \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in E,\, f(x) = y} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple 24. Soit X une v.a. telle que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -2, 2 \rrbracket)$. Déterminer la loi de X^2.